

### 38. Les modulus ! \* \*\* \*\*\*

- a) Quel est le reste de la division de 19 par 4 ?
- b) Quel est le reste de la division de 51 par 4 ?
- c) Quel est le reste de la division de 403 par 4 ?
- d) Quel est le reste de la division de 4499 par 4 ?
- e) Quel est le reste de la division de 1'827'155 par 4 ?
- f) Quelle remarque pouvez-vous faire en comparant les solutions de tous les exercices précédents ?

*Avant d'aller plus loin, regardez les solutions des exercices effectués jusqu'ici et la brève partie théorique qui suit ces solutions.*

- g) Calculez  $19 \pmod{9}$ , puis  $20 \pmod{7}$ , puis  $30 \pmod{6}$ , puis  $53 \pmod{8}$ .
- h) Les modulus 9 sont souvent utiles. Trouvez une technique pour calculer le plus rapidement possible  $2'835'967'345 \pmod{9}$ .
- i) La preuve par 9 pour les multiplications découle des propriétés mathématiques des modulus. Utilisez-la pour les trois multiplications suivantes :
  - 1)  $48 \cdot 7 = 346$ .
  - 2)  $375 \cdot 91 = 34'125$ .
  - 3)  $3872 \cdot 584 = 2'251'348$ .
- j) Le 1er septembre 2014 était un lundi. Quel jour de la semaine était le 1 janvier 2016 ?
- k) Neuf chiffres, tous différents, ont été utilisés pour écrire deux nombres entiers dont la somme est égale à 26'868. Quel chiffre n'a pas été employé pour écrire ces deux nombres ?

### Solutions

- a) 3
- b) 3
- c) 3
- d) 3
- e) 3
- f) Les solutions sont toutes identiques.

Définitions et notations : soit  $a$  et  $b$ , deux entiers, et  $n$ , un entier naturel non nul. On dit que  $a$  est **congru** à  $b$  modulo  $n$  si et seulement si  $a - b$  est divisible par  $n$ . On écrit  $a \equiv b \pmod{n}$  ou  $a \equiv b \pmod{\text{modulo } n}$ .

Il découle de cette définition que si l'on divise  $a$  par  $n$  et  $b$  par  $n$ , on obtient le même reste.

Exemple :  $51 \equiv 19 \pmod{4}$ , car  $51 - 19 = 32$ , et 32 est divisible par 4. On peut aussi dire que le reste de la division de 51 par 4 est 3, de même que le reste de la division de 19 par 4.

Ainsi, 19, 51, 403, 4499 et 1'827'155 sont congrus à 3 modulo 4.

On écrit  $19, 51, 403, 4499 \text{ et } 1'827'155 \equiv 3 \pmod{4}$ .

- g)  $19 \equiv 1 \pmod{9}$  car le reste de la division de 19 par 9 est égal à 1.  
 $20 \equiv 6 \pmod{7}$  car le reste de la division de 20 par 7 est égal à 6.

$30 \equiv 0 \pmod{6}$  car le reste de la division de 30 par 6 est égal à 0.

$53 \equiv 5 \pmod{8}$  car le reste de la division de 53 par 8 est égal à 5.

h) Une des techniques pour calculer le plus rapidement possible  $2'835'967'345 \pmod{9}$  consiste à éliminer les 9 et les groupes de chiffres dont la somme donne 9. On peut donc ici éliminer le 9, puis 5 et 4, puis 6 et 3, puis 2 et 7. Il ne reste que 835 dont la somme des chiffres est égale à 16. La somme des chiffres de 16 donne 7. Alors  $2'835'967'345 \equiv 7 \pmod{9}$ .

i) La preuve est dite par 9 car elle nécessite des calculs avec les modulus 9 :

1) De  $48 \equiv 3 \pmod{9}$  et de  $7 \equiv 7 \pmod{9}$ , on effectue  $3 \cdot 7 = 21 \equiv 3 \pmod{9}$ . Comme  $346 \equiv 4 \pmod{9}$ , on en conclut que cette multiplication est fautive car  $3 \pmod{9} \neq 4 \pmod{9}$ .

2) De  $375 \equiv 6 \pmod{9}$  et de  $91 \equiv 1 \pmod{9}$ , on effectue  $6 \cdot 1 = 6 \equiv 6 \pmod{9}$ . Comme  $34125 \equiv 6 \pmod{9}$ , peut-on conclure que cette multiplication est correcte ? Et bien non. En fait, ce résultat est bien juste ici mais la preuve par 9 ne peut pas le prouver comme vous pourrez le constater dans l'exercice suivant.

3) De  $3872 \equiv 2 \pmod{9}$  et de  $584 \equiv 8 \pmod{9}$ , on effectue  $2 \cdot 8 = 16 \equiv 7 \pmod{9}$ . Comme  $2'251'348 \equiv 7 \pmod{9}$ , on peut croire que cette multiplication est juste. Et pourtant elle est fautive. Le résultat correct est  $2'261'248$ .

Conclusion : la preuve par 9 ne garantit pas l'exactitude d'un résultat. Elle peut seulement nous assurer qu'un résultat est faux. Cette preuve n'est donc pas très intéressante.

j) Du 2 septembre 2014 au 1 septembre 2015, il y a 365 jours.

Du 2 septembre 2015 au 1er janvier 2016, il y a 122 jours ( $29 + 31 + 30 + 31 + 1$ ).

Du 1er septembre 2014 au 1er janvier 2016, il y a 487 jours.

$487 \equiv 4 \pmod{7}$ . Comme le 1er septembre 2014 était un lundi, le 1er janvier 2016 sera un **vendredi** (4 jours de la semaine après le lundi).

k) La preuve par 9 est aussi valable pour l'addition et, dans ce cas, c'est bien pratique.

$26'868 \equiv 3 \pmod{9}$ . Or,  $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 \equiv 0 \pmod{9}$ . Il nous faut obtenir  $3 \pmod{9}$ . Comme  $39 \equiv 3 \pmod{9}$ , le seul chiffre pouvant être éliminé est **6**. En effet,  $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 = 39$ .

Voici une somme possible :  $17'843 + 9025 = 26'868$ .

### Remarque :

Voici, à l'aide de deux exemples, une autre manière de rechercher les modulus, surtout intéressante lorsque l'on travaille avec des nombres négatifs :

Premier exemple. Pour calculer  $134 \pmod{8}$ , on cherche le multiple de 8 qui est le plus proche de 134, et inférieur à 134. C'est 128. Ensuite, il suffit de calculer l'écart, en valeur absolue, entre 134 et 128. Cet écart est 6. Alors,  $134 \pmod{8} \equiv 6$ .

Second exemple. Pour calculer  $-134 \pmod{8}$ , on cherche le multiple de 8 qui est le plus proche de -134, et inférieur à -134. C'est -136. Ensuite, il suffit de calculer l'écart, en valeur absolue, entre 134 et 136. Cet écart est 2. Alors,  $-134 \pmod{8} \equiv 2$ .

Il est aussi pratique de savoir que  $-134 \pmod{8} + 134 \pmod{8} = 0 \pmod{8}$ .