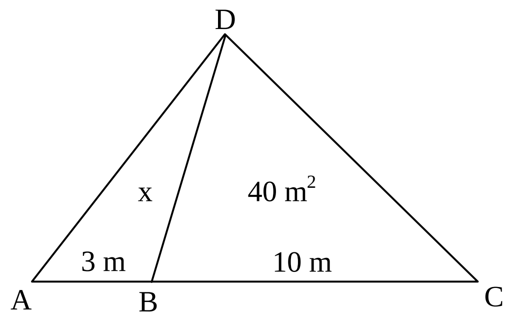
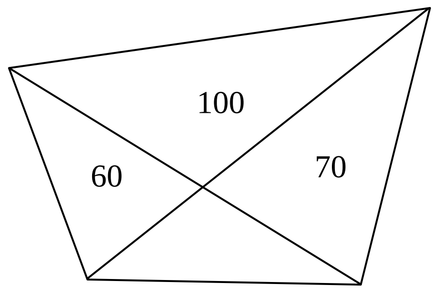
37. Recherche d'aires ! ** * ******

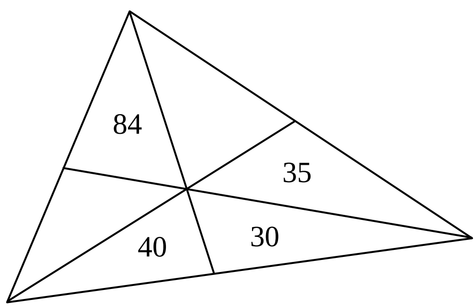
a) Dans le croquis ci-contre, on donne les mesures des côtés AB et BC ainsi que l'aire du triangle BCD. Quelle est l'aire x du triangle ABD ?



b) Dans le croquis ci-contre, chaque nombre représente, en m^2, l'aire du petit triangle dans lequel il se trouve. Quelle est l'aire totale de la figure ?



c) Dans le croquis ci-contre, chaque nombre représente, en m^2, l'aire du petit triangle dans lequel il se trouve. Quelle est l'aire totale de la figure ?

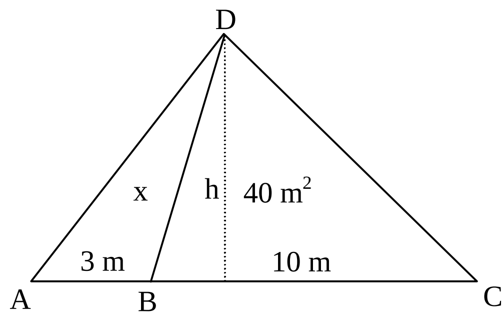


Solutions

a) Dessinons le segment h qui est à la fois hauteur du triangle ABD et du triangle BCD.

Aire de BCD = $\frac{10 \cdot h}{2} = 40 \Rightarrow$ h = 8 m.

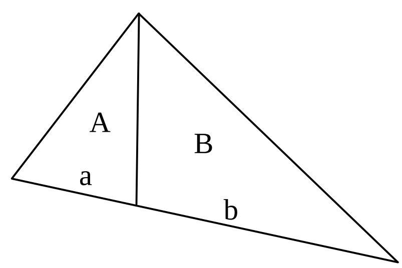
Alors, aire de x = $\frac{3 \cdot 8}{2}$ = **12 m²**.

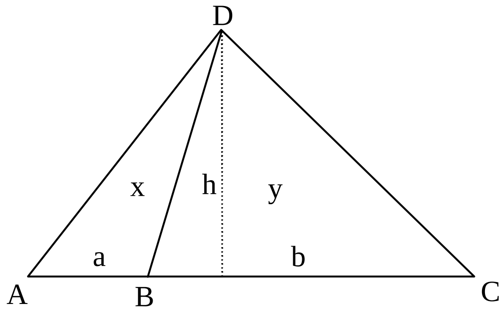


Rappelons ici une petite règle qui est souvent utile dans les concours de jeux mathématiques et logiques :

Le rapport des aires de deux triangles de même hauteur est égal au rapport de leurs bases.

Autrement dit, lorsqu'un triangle est partagé en deux par un segment issu d'un de ses sommets, on la relation suivante : $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$.

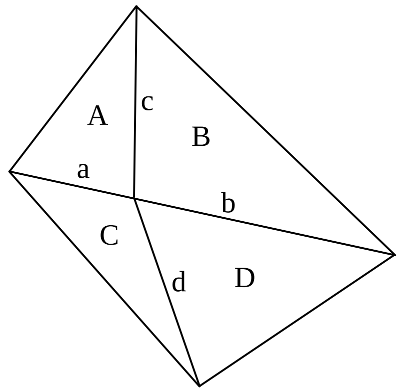




Preuve : Aire du triangle ABD = $x = \frac{a \cdot h}{2}$. Aire du triangle BDC = $y = \frac{b \cdot h}{2}$. Alors, $\frac{x}{y} = \frac{a \cdot h}{2} \cdot \frac{2}{b \cdot h} = \frac{a}{b}$.

Notre exercice aurait pu être résolu alors grâce à la relation suivante $\frac{3}{10} = \frac{x}{40}$, dont la solution est immédiate.

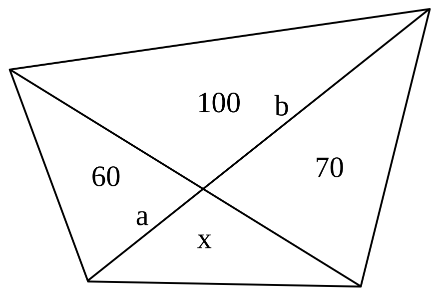
Regardons encore le croquis ci-contre dans lequel les côtés a et b sont alignés, ce qui n'est pas le cas des côtés c et d.



On a alors les propriétés suivantes :

$\frac{a}{b} = \frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Rightarrow \frac{A}{C} = \frac{B}{D} \neq \frac{c}{d}$ (c et d ne sont pas alignés)

b) Soit a la base du triangle de 60 m^2 et b, la base du triangle de 100 m^2. Ces deux triangles ont, par rapport à ces bases, la même hauteur. Les triangles d'aires x et 70 ont aussi la même hauteur par rapport aux bases a et b.



On peut alors appliquer la règle vue dans l'exercice précédent.

Ce qui donne $\frac{a}{b} = \frac{60}{100} = \frac{x}{70} \Rightarrow x = 42\ m^2$.

Aire totale : 60 + 100 + 70 + 42 = **<u>272 m^2</u>**.

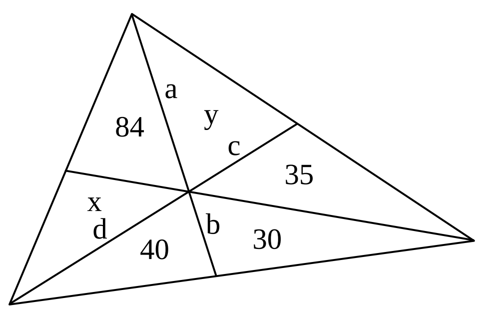
c) En appliquant la règle vue dans le premier exercice, il est facile d'obtenir deux équations à deux inconnues (a, b, c et d sont les bases ; x et y les aires) :

1. $\frac{a}{b} = \frac{84+x}{40} = \frac{y+35}{30} \Rightarrow 30x - 40y = -1120 \Rightarrow 3x - 4y = -112$ (a)

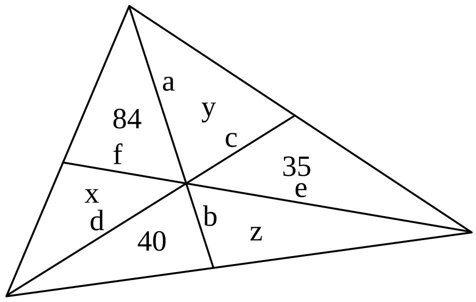
2. $\frac{c}{d} = \frac{y}{84+x} = \frac{35}{40+30} \Rightarrow 35x - 70y = -2940 \Rightarrow -2x + 4y = 168$ (b)

De (a) + (b), on obtient x = 56. Et ensuite y = 70.

Aire totale : 84 + 40 + 30 + 35 + 56 + 70 = **<u>315 m^2</u>**.



Notons encore qu'il est possible de trouver l'aire des trois plages manquantes (x, y et z) du croquis ci-contre.



On obtient un système de trois équations à trois inconnues dont la résolution est difficile (merci à la personne qui peut me la fournir) :

1. $\frac{a}{b} = \frac{84 + x}{40} = \frac{y + 35}{z}$

2. $\frac{c}{d} = \frac{y}{84 + x} = \frac{35}{40 + z}$

3. $\frac{e}{f} = \frac{y + 35}{84} = \frac{40 + z}{x}$