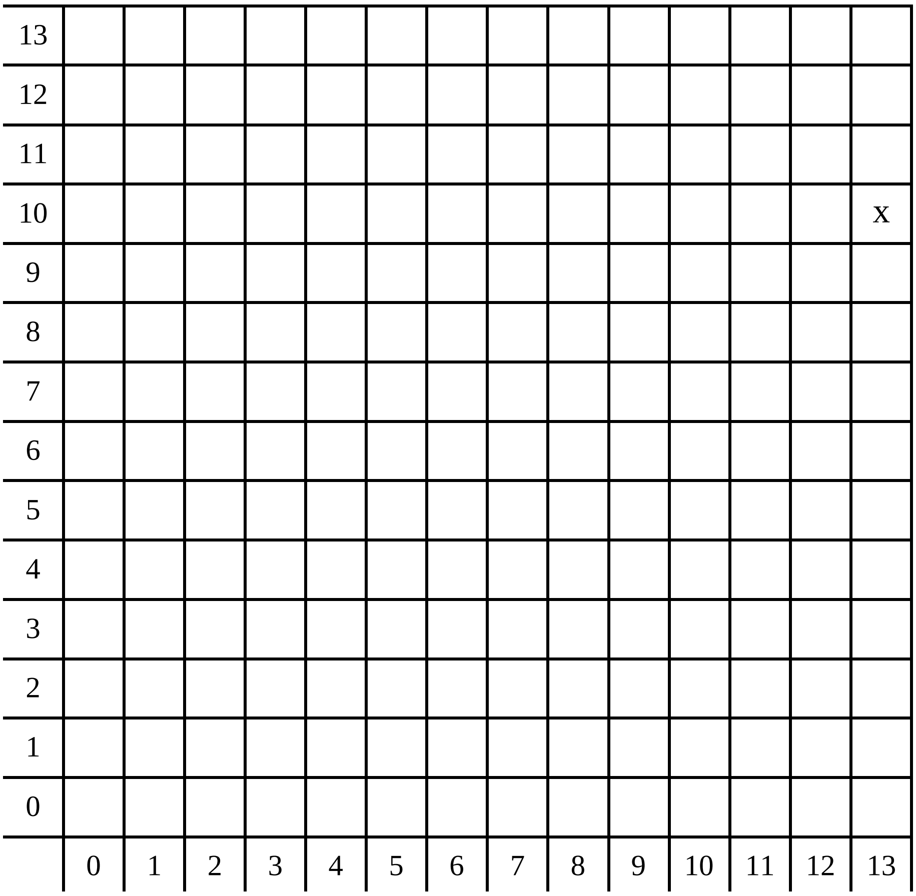
25. Coincez la reine ! ***   ****

Anne et Berthe ont dessiné un quadrillage contenant 196 cases carrées comme indiqué ci-dessous. Chaque case peut être repérée par ses coordonnées, le premier nombre indiquant sa position horizontale et le second sa position verticale. Par exemple, la case x est repérée par (13, 10).

Anne et Berthe jouent au jeu suivant : elles posent une reine sur une des 196 cases. Ensuite, elles la déplacent à tour de rôle. La reine peut se déplacer soit horizontalement vers la gauche, soit verticalement vers le bas, soit diagonalement vers le bas à gauche, et ce, d'autant de cases voulues. La première joueuse qui atteint la case (0, 0) gagne. Autrement dit, la première qui ne peut plus jouer a perdu.



Dans les parties suivantes (a à e), c'est toujours Anne qui commence.

a. Dans cette première partie, au départ, la reine est à la case (1, 3). Comment Anne doit-elle jouer son premier coup pour être sûre de gagner ?

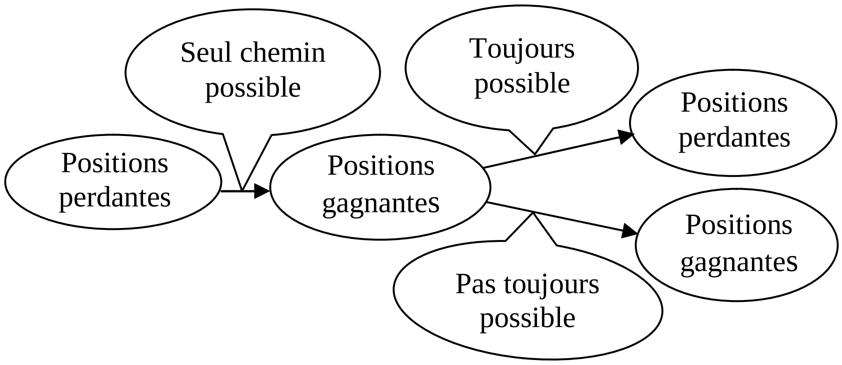
b. Dans la deuxième partie, au départ, la reine est à la case (6, 4). Comment Anne doit-elle jouer son premier coup pour être sûre de gagner ?

c. Dans la troisième partie, au départ, la reine est à la case (7, 9). Comment Anne doit-elle jouer son premier coup pour être sûre de gagner ?

d. Dans la quatrième partie, au départ, la reine est à la case (6, 10). Comment Anne doit-elle jouer son premier coup pour être sûre de gagner ?

e. Dans ce jeu, il existe ce que l'on appelle des mauvaises cases. Une mauvaise case est une case qui ne permettra jamais de gagner à celle qui doit jouer alors que la reine est sur cette case, à condition que son adversaire joue correctement les coups suivants. Ce jeu fait partie des jeux de Nim auxquels j'ai consacré un chapitre dans mon livre « Les Clefs des Enigmes Mathématiques ». Ces mauvaises cases, appelons-les positions perdantes.

Par convention, on parlera de positions perdantes ou gagnantes, par rapport à la personne à qui c'est le tour de jouer, alors que la reine est dans cette position. L'étude des jeux de Nim montre que celui qui a mis son adversaire dans une position perdante est assuré de gagner s'il joue correctement par la suite. Une position perdante ne peut conduire qu'à une position gagnante. Une position gagnante peut toujours conduire à une position perdante et peut parfois conduire à une position gagnante.



Dans ce jeu, quelles sont les positions perdantes parmi les 196 cases ? Si vous deviez jouer à « Coincez la reine » sur un quadrillage infini, vous serait-il possible de trouver toutes les positions perdantes ?

f. Il existe un lien entre les positions perdantes de ce jeu et le nombre d'or φ vu dans l'exercice précédent du site que vous êtes en train de visiter. Pour rappel : $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}61803398$. Quel est ce lien ?

Solutions

13	a	b	b	c		c			■			c	b	a
12	a	b	b	c		c					c	b	a	b
11	a	b	b	c		c				c	b	a	b	c
10	a	b	b	c		c	■		c	b	a	b	c	
9	a	b	b	c		c		♥	b	a	b	c		
8	a	b	b	c		c	c	b	a	b	c			■
7	a	b	b	c	■	c	b	a	b	c				
6	a	b	b	c	c	b	a	b	c		■			
5	a	b	b	■	b	a	b	c	c	c	c	c	c	c
4	a	b	b	b	a	b	♥	■						
3	a	♥	b	a	b	■	c	c	c	c	c	c	c	c
2	a	■	a	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b
1	a	a	■	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b
0	■	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

a. Attribuons le symbole ♥ pour la reine. Elle est en (1, 3). Toutes reines placées dans les cases « a » pourraient atteindre la case finale (0, 0) en un seul coup. Ce sont des cases gagnantes. Celle qui doit jouer alors que la reine est sur une de ces cases peut gagner en l'avançant jusqu'à la case finale. Anne doit aller à la case (1, 2) si elle veut être sûre de gagner. De la case (1, 2), Berthe ne peut qu'aller sur des cases gagnantes, soit (0, 2) ou (0, 1) ou (1, 1) ou (1, 0). Le coup suivant, Anne va pouvoir aller à la case finale et gagner. La case (1, 2) est perdante (pour celle qui doit jouer alors que la reine est sur cette case). Les cases noires représenteront les cases perdantes. Par symétrie, il est évident que la case (2, 1) est perdante. La case (0, 0) est aussi perdante.

b. Toutes les cases qui conduisent en un seul coup aux cases perdantes (1, 2) et (2, 1) sont gagnantes. Notons-les « b ». On voit alors que les cases (3, 5) et (5, 3) sont perdantes. De là, on ne peut aller que sur des cases gagnantes. Anne doit aller sur une position perdante. Elle va alors mettre la reine en (5, 3). Berthe ne pourra aller que sur des positions gagnantes et Anne, en jouant correctement, trouvera toujours une position perdante.

c. Notons « c » toutes les positions gagnantes supplémentaires, celles qui peuvent conduire en (3, 5) et en (5, 3). Les positions (4, 7) et (7, 4) sont des positions perdantes. Pour gagner, Anne doit amener la reine en (3, 5) ou en (7, 4). Il est intéressant de voir qu'elle a deux possibilités. Anne gagnera forcément en allant toujours sur des positions perdantes.

d. En continuant les recherches des positions gagnantes et perdantes, on verra que les cases (6, 10) et (10, 6) sont perdantes. Anne est ici, au départ, sur une position perdante. Sa tactique consiste à faire un tout petit déplacement pour ne pas faciliter la tache de Berthe et, à la moindre erreur de celle-ci, elle déplacera la reine sur une case perdante. Si les deux joueuses connaissent toutes les positions perdantes, le jeu n'a plus d'intérêt.

e. Les postions perdantes sont les cases noires du quadrillage. Comme il y a une symétrie par rapport à la diagonale, la position (x, y) est équivalente à la position (y, x). Pour simplifier, on ne mettra dans le tableau suivant que les positions (x, y) où $x \leq y$.

x	0	1	3	4	6	8	…
y	0	2	5	7	10	13	…

On constate que la différence entre les deux nombres de chaque couple augmente de 1, à chaque étape. D'autre part, le plus petit nombre dans chaque couple est le plus petit nombre entier non encore apparu dans la suite. La suite comprend chaque nombre entier exactement une seule fois (0 mis à part). Ces observations nous permettent de continuer la liste des couples perdants à l'infini.

f. Présentons le tableau des positions perdantes de manière légèrement différente :

Position n		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
x	A_n	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	…
y	B_n	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	…

Ci-dessous, le symbole [ ] signifie partie entière d'un nombre. Exemple : $[\pi] = 3$.

Alors, $A_n = [n \cdot \varphi]$ et $B_n = [n \cdot \varphi^2]$. C'est tout simplement génial ! Qui aurait pu imaginer la relation entre le énième couple des positions perdantes du jeu « Coincez la reine » et le nombre d'or ? C'est au mathématicien danois W. A. Wythoff que l'on doit cette découverte.

Deux exemples :

$A_8 = [8 \cdot 1{,}618] = [12{,}944] = 12$, $B_8 = [8 \cdot 1{,}618^2] = [20{,}943\ldots] = 20$.

$A_{123} = [123 \cdot 1{,}618] = [199{,}014] = 199$, $B_{123} = [123 \cdot 1{,}618^2] = [322{,}004\ldots] = 322$.

(12, 20) et (199, 322) sont des positions perdantes de notre jeu.

Ouf ! Une pause s'impose….

– Augustin Genoud, février 2014 –