**2. Les lapins ! ****

L'énigme suivante est très connue. Elle a contribué à la célébrité de son auteur, l'un des plus célèbres mathématiciens de l'histoire : Leonardo Fibonacci qui vécut approximativement entre 1175 et 1240.

Un homme a placé en janvier, dès leur naissance, un couple (ici un couple représente toujours un mâle et une femelle) de lapins dans un pâturage entouré d'un haut mur. Il cherchait à savoir combien il y aurait de couples de lapins plus tard dans ce pâturage. Il faut savoir qu'un couple de lapins engendre toujours (ce sont des conditions exceptionnelles) un autre couple de lapins chaque mois, mais seulement à partir du 2ème mois suivant leur naissance. Ainsi, un couple de lapins nés en janvier engendrera un autre couple en mars, puis un autre en avril, puis un autre en mai, etc.

1. Combien y aura-t-il de couples de lapins dans ce pâturage à la fin mars ?
2. Combien y aura-t-il de couples de lapins dans ce pâturage à la fin avril ?
3. Combien y aura-t-il de couples de lapins dans ce pâturage à la fin mai ?
4. Combien y aura-t-il de couples de lapins dans ce pâturage à la fin juillet ?
5. Combien y aura-t-il de couples de lapins dans ce pâturage à la fin décembre ?
6. Considérez le mois de janvier comme le mois 0, le mois de février comme le mois 1, le mois de mars comme le mois 2, le mois d'avril comme le mois 3, etc. Pour chaque numéro de mois, donnez le nombre de couples de lapins se trouvant dans ce pâturage à la fin de chaque mois. Vous remarquerez peut-être qu'il existe un procédé permettant de calculer rapidement, à partir du 3ème mois, le nombre total de couples se trouvant à la fin de chaque mois dans ce pâturage.

**Solutions**

1. Le couple (de lapins) né en janvier engendrera un autre couple en mars. <u>A la fin mars, il y aura 2 couples de lapins.</u>
2. En avril, seul le couple né en janvier engendrera un autre couple. <u>A la fin avril, il y aura 3 couples de lapins.</u>
3. En mai, le couple né en janvier et celui né en mars engendreront chacun un autre couple. <u>A la fin mai, il y aura 5 couples de lapins</u>.

   Pour la suite, établissons un tableau, et mettons :

   Dans la colonne A, les couples engendrés par le couple initial.

   D dans la colonne B, les couples engendrés par le couple né en mars. Le premier de ces couples est né en mai.

   Dans la colonne C, les couples engendrés par le couple né en avril.

   Dans la colonne D, les couples engendrés par les deux couples nés en mai.

   Dans la colonne E, les couples engendrés par les trois couples nés en juin.

   On continue le même raisonnement pour les colonnes suivantes.

   Dans la colonne S, on a le nombre total des couples nés chaque mois. Dans la colonne T, on a le nombre total de couples vivant dans ce pâturage, à la fin de chaque mois.

| Mois | A | B | C | D | E | F | G | H | I | S | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Janvier | 1 | | | | | | | | | 1 | 1 |
| Février | 0 | | | | | | | | | 0 | 1 |
| Mars | 1 | | | | | | | | | 1 | 2 |
| Avril | 1 | | | | | | | | | 1 | 3 |
| Mai | 1 | 1 | | | | | | | | 2 | 5 |
| Juin | 1 | 1 | 1 | | | | | | | 3 | 8 |
| Juillet | 1 | 1 | 1 | 2 | | | | | | 5 | 13 |
| Août | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | | | | | 8 | 21 |
| Septembre | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | | | | 13 | 34 |
| Octobre | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | | | 21 | 55 |
| Novembre | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | | 34 | 89 |
| Décembre | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 55 | 144 |

4. <u>A la fin juillet, il y aura 13 couples de lapins.</u>
5. <u>A la fin décembre, il y aura 144 couples de lapins.</u>
6. La relation demandée est donnée dans le tableau suivant :

| Mois | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de couples | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | 144 |

La suite 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 est appelée suite de Fibonacci. Elle est étonnante car, chacun des termes est, à partir du 3ème, la somme des deux termes qui le précèdent directement dans la suite. Ainsi, 8 = 5 + 3 et 89 = 55 + 34. Le rapport de deux nombres consécutifs de cette suite est alternativement inférieur et supérieur au nombre d'or (voir exercice 24, même rubrique) : $\frac{1}{1}=1$ ; $\frac{2}{1}=2$ ; $\frac{3}{2}=1{,}5$ ; $\frac{5}{3}\cong 1{,}66$ ; $\frac{8}{5}=1{,}6$ ; $\frac{13}{8}=1{,}625$; etc.

C'est une des nombreuses propriétés de la suite de Fibonacci.

Il existe d'autres suites de Fibonacci commençant, par exemple, par 0, 1, ce qui donne 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, etc. Etonnamment, les nombres de Fibonacci apparaissent régulièrement en mathématiques et aussi dans la nature, comme par exemple, dans les spirales des tournesols ou des pommes de pin !