18. Un nombre très recherché

A l'aide d'une calculette, effectuez les opérations suivantes et donnez vos réponses en nombres décimaux arrondis au centième près.

a) $4-\frac{4}{3}\cong$ b) $4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}\cong$ c) $4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}\cong$

d) $4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}\cong$ e) $4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-\frac{4}{11}\cong$ f) $4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-\frac{4}{11}+\frac{4}{13}\cong$

g) $4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-\frac{4}{11}+\frac{4}{13}-\frac{4}{15}\cong$

h) En continuant indéfiniment ce même type d'opérations dont la suite est facile à déduire, on obtient un nombre qui a été recherché pendant très longtemps. Quel est ce nombre illustre ?

Solutions

a) $4-\frac{4}{3}\cong 2{,}67$ b) $4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}\cong 3{,}47$ c) $4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}\cong 2{,}90$

d) $4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}\cong 3{,}34$ e) $4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-\frac{4}{11}\cong 2{,}98$ f) $4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-\frac{4}{11}+\frac{4}{13}\cong 3{,}28$

g) $4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-\frac{4}{11}+\frac{4}{13}-\frac{4}{15}\cong 3{,}02$

h) En continuant à l'infini, on obtient le nombre $\pi \cong 3{,}141592653589793238\ldots$

Imaginons l'un de nos ancêtres, il y a quelques milliers d'années, cherchant à connaître la longueur de la circonférence d'un cercle. Cet ancêtre trace un cercle dans le sable puis coupe quelques bouts de tige ayant chacun la longueur du diamètre du cercle tracé. Il pose ensuite les tiges le long du cercle, les unes à la suite des autres et il constate que le cercle est un peu plus long que trois tiges. Il répète la même opération avec des cercles de différentes grandeurs et arrive toujours à la même conclusion : le périmètre d'un cercle est un peu plus long que trois fois le diamètre du cercle. Autrement dit, pour calculer le périmètre d'un cercle, il faut multiplier son diamètre par un nombre légèrement supérieur à 3. Appelons ce nombre π (pi) même si ce symbole n'est utilisé que depuis le 18e siècle (π correspond à la première lettre du mot grec signifiant périmètre).

Deux mille ans avant notre ère, des mathématiciens étaient convaincus que π était unique, mais ils avaient des difficultés à lui donner une valeur précise. Ils cherchèrent alors à calculer le plus exactement possible le périmètre d'un cercle en construisant des polygones réguliers, les uns, le plus grand possible, à l'intérieur du cercle, les autres, le plus petit possible, autour du même cercle. Ils arrivèrent ainsi à obtenir le périmètre de ce cercle avec de plus en plus de précision et par conséquent, obtinrent des valeurs de π de plus en plus précises.

Le savant grec Archimède, aux alentours de 250 avant notre ère, détermina que la valeur de π était proche de 22/7, soit environ 3,1428. Aujourd'hui, on sait que π est un nombre illimité non périodique, ce qui signifie qu'il n'a pas de valeur exacte et qu'aucun groupe des nombres qui suivent sa virgule ne se répète à l'infini. Cela indique aussi qu'aucune fraction ne peut représenter exactement π. 22/7 est un nombre illimité périodique, égal à $3{,}\overline{142857}$. La barre au-dessus de 142857 signifie que ce groupe de 6 chiffres se répète à l'infini. Grâce aux ordinateurs, des milliards de décimales de π sont actuellement connues. Le nombre 3,14 pour valeur approchée de π est suffisant dans bien des cas.

Le nombre π se retrouve dans de multiples domaines des mathématiques. Ses utilisations les plus connues sont celles qui permettent de calculer le périmètre d'un cercle et l'aire d'un disque :

$p = \pi\, d$ (le périmètre est égal au produit de π par le diamètre)

$A = \pi\, r^2$ (l'aire est égale au produit de π par le carré du rayon)