

15. Les nombres premiers

Observez le tableau suivant. Dites comment il a été construit.

Ce tableau peut être agrandi à l'infini. Complétez les cases vides.

4	7	10	13	16	19						
7	12	17	22	27	32						
10	17	24	31	38	45						
13	22	31	40	49	58						
16	27	38	49	60	71						
19	32	45	58	71	84						

Une fois le tableau complété, faites la liste, dans l'ordre croissant, de tous les nombres entiers naturels positifs inférieurs à 50 qui ne pourraient pas être dans ce tableau supposé complété à l'infini. Appelons A, cette liste.

Prenez chacun des nombres de la liste A (dans l'ordre croissant), multipliez-le par 2 et ajoutez 1 au résultat. Vous obtiendrez une nouvelle liste de nombres que nous appellerons liste B.

Que représente cette liste B ?

Solutions

Pour construire ce tableau, on a mis le nombre 4, en haut à gauche.

Première ligne et première colonne : on ajoute toujours 3 au nombre précédent pour trouver la suite 7, 10, 13, 16, 19, etc.

2ème ligne et 2ème colonne : on part de 7, puis on ajoute 5 à 7 pour trouver 12, puis on ajoute 5 à 12 pour trouver 17, puis on ajoute 5 à 17 pour trouver 22, etc.

3ème ligne et 3ème colonne : on part de 10, puis on ajoute 7 à 10 pour trouver 17, puis on ajoute 7 à 17 pour trouver 24, puis on ajoute 7 à 24 pour trouver 31, etc.

4ème ligne et 4ème colonne : on part de 13 et on ajoute successivement 9.

5ème ligne et 5ème colonne : on part de 16 et on ajoute successivement 11.

6ème ligne et 6ème colonne : on part de 19 et on ajoute successivement 13.

On continue ainsi le même procédé. Voici le tableau complété :

4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37
7	12	17	22	27	32	37	42	47	52	57	62
10	17	24	31	38	45	52	59	66	73	80	87
13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112
16	27	38	49	60	71	82	93	104	115	126	137
19	32	45	58	71	84	97	110	123	136	149	162
22	37	52	67	82	97	112	127	142	157	172	187

Liste A : 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 14, 15, 18, 20, 21, 23, 26, 29, 30, 33, 35, 36, 39, 41, 44 et 48.

Liste B : 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

La liste B représente tous les nombres premiers inférieurs à 100, et supérieurs à 2.

Rappel : un nombre premier est un nombre entier naturel positif qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. Cette définition exclut le 0 et le 1. Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12. Donc, 12 n'est pas un nombre premier. Les diviseurs de 17 sont 1 et 17, alors 17 est un nombre premier.

Ce tableau, complété à l'infini permet de trouver tous les nombres premiers, à l'exception de 2 ! Il est dû à l'imagination étonnante d'un jeune étudiant hindou du nom de Sundaram qui a découvert ce procédé en 1934.

Les nombres premiers ont de nombreuses applications en mathématiques. Ils intéressent les mathématiciens depuis l'Antiquité. On pourrait y consacrer un livre entier. On se contentera ici de quelques notions et curiosités :

- Les nombres qui ne sont pas premiers sont appelés composés : 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, etc. Les nombres 0 et 1 ne sont ni premiers, ni composés.
- Les nombres premiers sont infinis.
- Au 25 janvier 2013, le plus grand nombre premier connu est $2^{57\ 885\ 161} - 1$. Il compte un peu plus de 17 millions de chiffres en écriture décimale.
- Chaque nombre entier supérieur à 1 est un nombre premier ou un produit de nombres premiers. La factorisation d'un nombre composé est unique (on ne tient pas compte de l'ordre des facteurs). Ainsi, $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.
- Le nombre 73'939'133 est non seulement premier, mais tous les nombres obtenus en supprimant un chiffre après l'autre, à partir de la droite, sont également premiers. C'est le plus grand nombre ayant cette propriété.
- En observant la liste des nombres premiers, on s'aperçoit que les écarts entre deux nombres premiers sont variables : de 19 à 23, il y a 3 nombres composés ; de 53 à 59, il y a 5 nombres composés. Les écarts entre deux nombres premiers peuvent être aussi grands que voulu. Et pourtant, il serait faux de croire que la suite des nombres premiers se raréfie au point de s'arrêter.
- Il n'existe actuellement aucune méthode permettant de reconnaître a priori les nombres premiers.