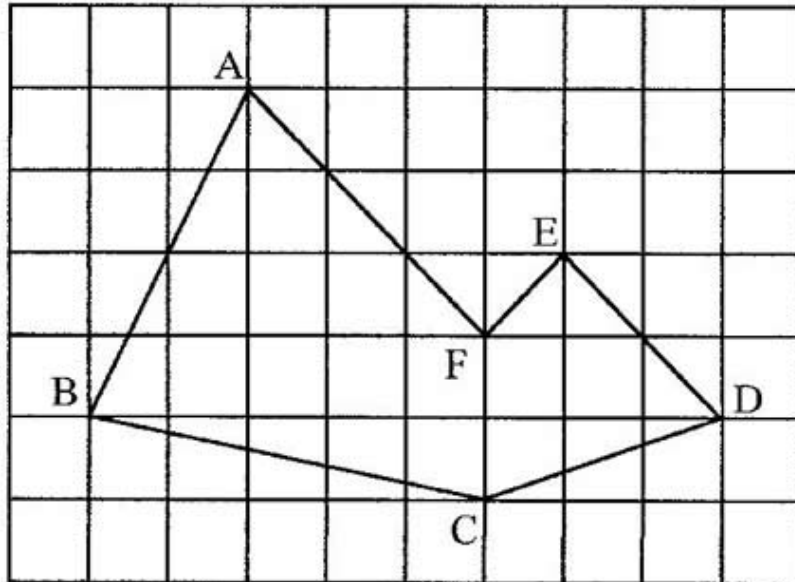


12. L'aire du polygone

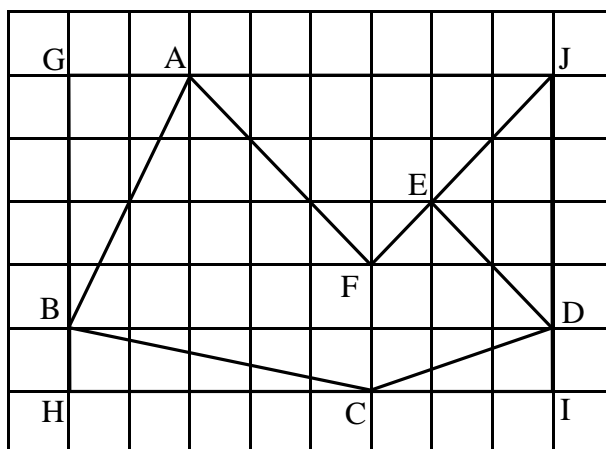
Le quadrillage ci-dessous est formé de carrés de 1 cm de côté. Les points A, B, C, D, E et F appartiennent à des croisements de ce quadrillage. Quelle est l'aire du polygone (hexagone non régulier) ABCDEF ?

Note : ce petit exercice a pour but de découvrir le théorème de Pick.



Solution

Il existe de multiples manières de calculer l'aire de ce polygone. L'une d'elle consiste à construire le rectangle GHIJ qui entoure le polygone dont on cherche l'aire et en dessinant le segment EJ. L'aire cherchée devient l'aire du rectangle GHIJ moins l'aire de cinq triangles.



$$\text{Aire du rectangle GHIJ} = 8 \cdot 5$$

$$= 40 \text{ cm}^2$$

$$\text{Aire du triangle AFJ} = 6 \cdot 3 : 2$$

$$= 9 \text{ cm}^2$$

$$\text{Aire du triangle GBA} = \text{Aire du triangle JED} = 4 \cdot 2 : 2$$

$$= 4 \text{ cm}^2$$

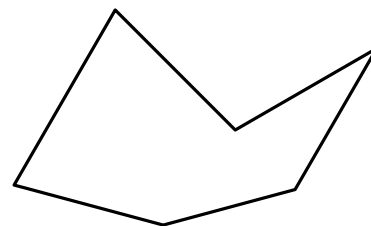
$$\text{Aire du triangle BHC} = 5 \cdot 1 : 2 = 2,5 \text{ cm}^2$$

$$\text{Aire du triangle CID} = 3 \cdot 1 : 2 = 1,5 \text{ cm}^2$$

$$\text{Aire du polygone} = 40 - 9 - 4 - 4 - 2,5 - 1,5 = \mathbf{19 \text{ cm}^2}$$

Voyons maintenant le théorème de Pick :

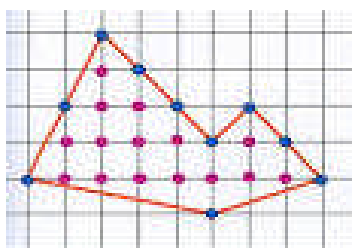
Définition : un polygone simple est un polygone dont la frontière est une ligne polygonale fermée comme la figure ci-contre (les segments formant la frontière ne doivent pas se croiser).



Lorsqu'un polygone simple est construit sur un quadrillage de points équidistants, que tous les sommets du polygone appartiennent à des croisements du quadrillage, alors il existe une formule qui permet de calculer l'aire (A) de ce polygone. La voici :

$A = i + \frac{p}{2} - 1$, où i représente le nombre de croisements à l'intérieur du polygone et p le nombre de croisements se trouvant sur la frontière du polygone.

Reprenons notre exercice de départ :



Il y a 15 croisements (points roses) à l'intérieur de notre polygone, donc $i = 15$.

Il y a 10 croisements (points bleus) sur la frontière de notre polygone, donc $p = 10$.

Notre aire devient $A = 15 + \frac{10}{2} - 1 = 19 \text{ cm}^2$.

Ce théorème n'est certainement pas d'une grande utilité mais il est amusant.

Georg Alexander PICK est né à Vienne le 10 août 1859. Il a étudié les mathématiques et la physique à l'université de Vienne de 1875 à 1879 et obtient, en 1880, le grade de Docteur de l'université de Vienne. Il a été Professeur de mathématiques à l'université allemande de Prague. Il fut déporté en 1942 et mourut le 26 juillet 1942 dans le camp de concentration de Theresienstadt.